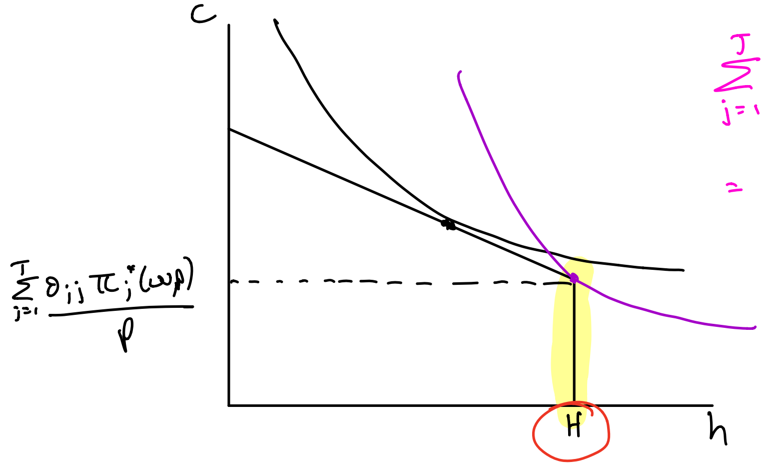
Teoría del consumidor:

costo de mercado de consumo de descanso

$$\max_{c,h} \; u_i(c,h) \qquad s.a. \quad pc + wh = wH_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\, \pi_j^*(w,p)$$

$$h \leq H_i$$



$$\frac{\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\, \pi(\phi w, \phi p)}{\phi p} = \frac{\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\, \cancel{\phi}\, \pi(w,p)}{\cancel{\phi}\, p}$$

$$\mathcal{L} = u_i(c,h) + \lambda \left(wH_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\, \pi_j^*(w,p) - pc - wh \right)$$

Condiciones de primer orden:

$$[c]: \quad \frac{\partial u_i(c,h)}{\partial c} - \lambda p = 0$$

$$[h]: \quad \frac{\partial u_i(c,h)}{\partial h} - \lambda w = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad \frac{\partial u_i(c,h)}{\partial c} = \lambda p, \qquad \frac{\partial u_i(c,h)}{\partial h} = \lambda w$$

$$[\lambda]: \quad wH_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\, \pi_j^*(w,p) - pc - wh = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\frac{\partial u_i(c,h)}{\partial h}}{\frac{\partial u_i(c,h)}{\partial c}} = \frac{w}{p}}$$

$$\boxed{pc + wh = wH_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\, \pi_j^*(w,p)}$$

2 ecuaciones en 2 incógnitas: c^*, h^*

$$MRS_{(c^*,h^*)} = \frac{w}{p}$$

Al resolver obtenemos $c^*(w,p)$, $h^*(w,p)$.

Para obtener $n^*(w,p)$: $\quad n+h = H_i$

$\Rightarrow \quad n^*(w,p) = H_i - h^*(w,p)$

Ejemplo: $u_i(c,h) = \ln c + \gamma \ln h$

parámetro de cuánto valora el hogar el ocio

$$= \ln c + \ln h^\gamma = \ln(c \cdot h^\gamma)$$

$\Rightarrow$ es equivalente a $u_i(c,h) = c^1 h^\gamma \longrightarrow$ cobb-Douglas.

$\Rightarrow$ Nos vamos a referir a $u(c,h) = \ln c + \gamma \ln h$ como Cobb-Douglas.

$$\mathcal{L} = \ln c + \gamma \ln h + \lambda\left(wH_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \pi_j^*(w,p) - pc - wh\right)$$

$$\frac{\partial u(c,h)}{\partial c} = \frac{1}{c} \qquad \frac{\partial u(c,h)}{\partial h} = \frac{\gamma}{h}$$

$\Rightarrow$ cond. de optimalidad son:

$$\frac{\gamma/h}{1/c} = \frac{w}{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\gamma c}{h} = \frac{w}{p}} \quad (*)$$

$$\boxed{pc + wh = wH_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \pi_i^*(w,p)}$$

$$c = \frac{wh}{\gamma p}$$

$$\cancel{p}\left(\frac{wh}{\gamma \cancel{p}}\right) + wh = \frac{wh}{\gamma} + wh = wh\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) = wh\frac{(1+\gamma)}{\gamma}$$

$$= wH_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \pi_i^*(w,p)$$

$$\Rightarrow \boxed{h^*(w,p) = \frac{\gamma}{w(1+\gamma)}\left[wH_i + \sum_{j=1}^{J}\theta_{ij}\pi_j^*(w,p)\right]} \quad (*)$$

L Demanda por ocio asumiendo que solución es interior.

$$\boxed{h^*(w,p) = \min\left\{H_i, \frac{\gamma}{w(1+\gamma)}\left[wH_i + \sum_{j=1}^{J}\theta_{ij}\pi_j(w,p)\right]\right\}}$$

Asumiendo que solución es interior:

$$c^*(w,p) = \frac{\cancel{w}}{\cancel{\gamma}p}\cdot\left[\frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{w}(1+\gamma)}\left[wH_i + \sum_{j=1}^{J}\theta_{ij}\pi_j^*(w,p)\right]\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{c^*(w,p) = \frac{1}{p(1+\gamma)}\left[wH_i + \sum_{j=1}^{J}\theta_{ij}\pi_i^*(w,p)\right]}$$

L Demanda por el bien final.

Oferta laboral: $n^*(w,p) = H_i - h^*(w,p)$

$$\Rightarrow \boxed{n^*(w,p) = H_i - \frac{\gamma}{w(1+\gamma)}\left[wH_i + \sum_{j=1}^{J}\theta_{ij}\pi_j^*(w,p)\right]}$$

Propiedad: funciones de demanda $c^*(w,p)$, $h^*(w,p)$ y de oferta laboral son homogeneas de grado 0:

$$c^*(w,p) = c^*(\phi w, \phi p)$$
$$h^*(w,p) = h^*(\phi w, \phi p)$$
$$n^*(w,p) = n^*(\phi w, \phi p)$$

$$C^*(\phi w, \phi p) = \frac{1}{\phi p(1+r)}\left[\phi w H_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \underbrace{\pi_i^*(\phi w, \phi p)}\right]$$

π^* es homogenea de grado 1

$\pi(\phi w, \phi p) = \phi\, \pi(w, p)$

$$= \frac{1}{\cancel{\phi} p(1+r)}\left[\cancel{\phi} w H_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cancel{\phi} \pi_i(w, p)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{c^*(\phi w, \phi p) = c^*(w, p)}$$

Equilibrio competitivo:

Un equilibrio competitivo son precios w^*, p^* y cantidades: $\{y_j^*, l_j^*, \pi_j^*\}_{j=1}^{J}$ de las firmas y $\{c_i^*, n_i^*, h_i^*\}_{i=1}^{I}$ de los hogares tal que:

1. Dados w^*, p^*, las cantidades de las firmas y hogares son óptimas:

$$y_j^* = y^*(w^*, p^*)$$
$$l_j^* = l^*(w^*, p^*)$$
$$\pi_j^* = \pi^*(w^*, p^*)$$
$$c_i^* = c^*(w^*, p^*)$$
$$\vdots$$

2. Los precios w^* y p^* son tales que los mercados se vacían:

- Mercado de bienes y servicios:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} c_i^*(w^*, p^*)}_{\text{Demanda total por bien final.}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} y_j^*(w^*, p^*)}_{\text{Oferta total del bien final.}}$$

- mercado laboral:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} n_i^*(w^*, p^*)}_{\text{Oferta laboral total}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} l_j^*(w^*, p^*)}_{\text{Demanda laboral agregada}}$$

2 ecuaciones dependen de (w, p).

2 ecuaciones en 2 incógnitas: w^*, p^*.

$c^*(w,p)$, $y^*(w,p)$, $n^*(w,p)$, $l^*(w,p)$ son todas homogéneas de grado 0.

Es decir, si (w^*, p^*) solucionan el sistema de ecuaciones de arriba $\Rightarrow$ $(\phi w^*, \phi p^*)$ también lo van a solucionar para todo $\phi > 0$.

Es decir, este sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. Matemáticamente las 2 condiciones de vaciado de mercado no son linealmente independientes. → ley de walras.

$\Rightarrow$ se debe normalizar uno de los precios para que la solución sea única.

Generalmente $p = 1$ y decimos que el bien final c es el bien "numerario".

Pasos para resolver el equilibrio:

1. Normalizar $p=1$
2. Resolver problema de la firma: $y^*(w),\ \ell^*(w),\ \pi^*(w)$
3. Resolver problema del hogar: $c^*(w),\ n^*(w),\ h^*(w)$
4. escribir condiciones de vaciado y encontrar w^*.

Ejemplo: Hay I hogares idénticos y J firmas idénticas. Cada hogar $i \in \{1,\dots,I\}$ es dueño de la misma proporción de cada firma: $\theta_{ij} = \frac{1}{I}$, $i \in \{1,\dots,I\}$, $j \in \{1,\dots,J\}$,

Solución de la firma:

$f(\ell) = A_j \ell^{1-\alpha}$

$$\ell_j^*(w) = \left(\frac{(1-\alpha)A}{w}\right)^{1/\alpha}$$

$$y_j^*(w) = A\left(\frac{(1-\alpha)A}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\pi_j^*(w) = \alpha A\left(\frac{(1-\alpha)A}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Solución del hogar:

$u(c,h) = \ln c + \gamma \ln h$

$$c_i^*(w) = \frac{wH_i}{1+\gamma} + \frac{1}{1+\gamma}\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\pi_j^*(w)$$

$$h_i^*(w) = \frac{\gamma H_i}{1+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\frac{\pi_j^*(w)}{w}$$

$$n_i^*(w) = \frac{H_i}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\frac{\pi_j^*(w)}{w}$$

$\theta_{ij} = \frac{1}{I}$ para todo j: $\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\pi_i^*(w) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{I}\pi^*(w)$

Firmas son idénticas $\Rightarrow \pi_j^*(w) = \pi^*(w)$

$$= \frac{J}{I}\pi^*(w)$$

$$c_i^*(w) = \frac{wH_i}{1+\gamma} + \frac{1}{1+\gamma}\frac{J}{I}\pi^*(w)$$

$$h_i^*(w) = \frac{\gamma H_i}{1+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{J}{I}\frac{\pi^*(w)}{w}$$

$$n_i^*(w) = \frac{H_i}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{J}{I}\frac{\pi^*(w)}{w}$$

Condición de vaciado de mercado laboral:

$$\sum_{i=1}^{I} n_i^*(w) = \sum_{j=1}^{J} l_j^*(w)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{I\, n^*(w) = J\, l^*(w)}$$

$$\pi^*(w) = \alpha A\left(\frac{(1-\alpha)A}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$I\left[\frac{H}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{J}{I}\frac{\pi^*(w)}{w}\right] = J\left[\left(\frac{(1-\alpha)A}{w}\right)^{1/\alpha}\right]$$

"Camino largo": despejar de es condición w^*.

$\vdots$

$$w = \left(\frac{J}{I}\right)^{\alpha} A\left(\frac{(1+\gamma-\alpha)}{H(1-\alpha)}\right)^{\alpha}(1-\alpha)$$ — salario de equilibrio.

$$c_i^*(w) = \frac{wH_i}{1+\gamma} + \frac{1}{1+\gamma}\frac{J}{I}\pi^*(w)$$

$$h_i^*(w) = \frac{\gamma H_i}{1+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{J}{I}\frac{\pi^*(w)}{w}$$

$$n_i^*(w) = \frac{H_i}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{J}{I}\frac{\pi^*(w)}{w}$$

"Camino corto": resolver para ℓ^*:

$$I\, n^*(w) = J\,\ell^*(w)$$

Idea: escribir esta ecuación en términos de ℓ y despejar para encontrar ℓ^*.

$$I\left[\frac{H}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{J}{I}\frac{\pi^*(w)}{w}\right] = J\ell$$

Recordemos: cuando $f(\ell)$ es Cobb-douglas:

$$\pi^*(w) = \alpha\, y^*(w)$$

$$\frac{w\,\ell^*(w)}{y^*(w)} = 1-\alpha$$

$$\frac{w\,\ell^*(w)}{1-\alpha} = y^*(w)$$

$$\Rightarrow \pi^*(w) = \frac{\alpha\, w\,\ell^*(w)}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^*(w)}{w} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\ell^*(w)$$

$$I\left(\frac{H}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{J}{I}\frac{\alpha}{1-\alpha}\ell\right) = J\ell$$

$$\Leftrightarrow \frac{IH}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma}J\frac{\alpha}{1-\alpha}\ell = J\ell$$

$$\frac{IH}{1+\gamma} = J\ell\underbrace{\left(1 + \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}$$

$$\frac{(1+\gamma)(1-\alpha)+\gamma\alpha}{(1+\gamma)(1-\alpha)} = \frac{1+\gamma-\alpha-\cancel{\gamma\alpha}+\cancel{\gamma\alpha}}{(1+\gamma)(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{IH}{\cancel{1+\gamma}} = J\ell\left(\frac{1+\gamma-\alpha}{\cancel{(1+\gamma)}(1-\alpha)}\right) \Rightarrow \boxed{\ell^* = \left(\frac{I}{J}\right)\cdot\frac{H(1-\alpha)}{1+\gamma-\alpha}}$$